

[문제 1] 다음 물음에 답하시오. (50점)

1. 삼각형  $ABC$ 는  $\overline{AB} = x$ ,  $\overline{BC} = \frac{1}{x}$  ( $x > 0$ ) 이고  $\angle ABC = 90^\circ$  인 직각삼각형이다.

이 삼각형의 내접원의 넓이를  $f(x)$ , 외접원의 넓이를  $g(x)$ 라 할 때,

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)g(x)$ 의 값을 구하시오.

2.  $0 \leq m \leq 2026$ 인 실수  $m$ 에 대하여 기울기가  $\sqrt{m}$ 이고 타원  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에 접하는

두 직선  $l_1, l_2$ 가 있다. 직선  $l_1, l_2$ 와 각각 수직으로 만나고 타원  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 과 접하는

두 직선  $l_3, l_4$ 가 있다. 네 직선  $l_1, l_2, l_3, l_4$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를  $S(m)$ 이라 할 때,

$\{S(m)\}^2$ 의 최댓값을 구하시오.

3. 좌표평면 위의 세 점  $A(6, 2)$ ,  $B(-2, -4)$ ,  $C(5, -1)$ 을 꼭짓점으로 하는

삼각형  $ABC$ 의 무게중심을  $G$ 라 할 때,  $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}| = 4|\overrightarrow{PG}|$ 를 만족시키는 점  $P$ 가

나타내는 도형을  $T$ 라 하자. 도형  $T$ 위의 점  $P$ 에 대하여 삼각형  $APC$ 의 넓이의

최댓값을 구하시오.

[문제 2] 다음 물음에 답하시오. (50점)

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(a^{2n} + a^{5n})$ 의 값을 구하시오. (단,  $a$ 는 양수이다.)

2. 자연수  $n$ 에 대하여  $n^k \leq k^n$ 을 만족시키는 자연수  $k$ 의 개수를  $a_n$ 이라 하자.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$ 의 값을 구하시오. (단,  $n, k$ 는 2보다 큰 자연수이다.)

3. 타원  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $0 < b < a$ )의 한 초점이 포물선  $y^2 = 4px$  ( $p > 0$ )의 초점일 때,  
포물선과 타원이 만나는 두 점을  $P_1, P_2$ 라 하자. 점  $P_1$ 에서의 포물선의 접선과  
점  $P_2$ 에서의 포물선의 접선이 만나는 점을  $A$ 라 하자. 각  $P_1AP_2$ 의 크기가  $60^\circ$ 일 때,  
 $\frac{a}{p}$ 의 값을 구하시오.